Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων

Ομάδα Θεμάτων Α

Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Τελική Εξέταση – 23 Ιουνίου 2017
Σκιαγράφημα Λύσεων.

1. (10) Έστω $\phi : R \to S$, ομομορφισμός αντιμεταθετικών δακτυλίων.

   (α') (~~10~~ 5 Μον.) Να δείξετε ότι το σύνολο $\ker\phi$ είναι ιδεώδες του R.

   Απάντηση:

   - $0 \in \ker\phi \Rightarrow \ker\phi \neq \emptyset$.
   - $a, b \in \ker\phi \Rightarrow \phi(a-b) = \phi(a) - \phi(b) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow a - b \in \ker\phi$.
   - $r \in R, a \in \ker\phi \Rightarrow \phi(ra) = \phi(r)\phi(a) = \phi(r)0 = 0 \Rightarrow ra = ar \in \ker\phi$.

   (β') (5 Μον.) Όταν ο δακτύλιος S είναι ακεραία περιοχή, να δείξετε ότι το ιδεώδες $\ker\phi$ είναι πρώτο.

   Απάντηση: Έστω $ab \in \ker\phi$. Τότε $0 = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Αφού ο S δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, συμπεραίνουμε ότι $\phi(a)$ ή $\phi(b) = 0$ και άρα a ή $b \in \ker\phi$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι ο υποδακτύλιος $\Im\phi \subset S$ είναι ακεραία περιοχή και αφού $R/\ker\phi \cong \Im\phi$, συμπεραίνουμε ότι $R/\ker\phi$ είναι ακεραία περιοχή, και άρα $\ker\phi$ πρώτο ιδεώδες. (Είναι ΛΑΘΟΣ να γράψετε $R/\ker\phi \cong S$, ή ότι ϕ είναι επιμορφισμός).

2. (20) Έστω $R = \mathbb{Z}_5[x, y]$ και έστω $J = \{f(x, y) \in R : f(x, 0) = 0\}$.

   (α') (10 μον.) Να αποδείξετε ότι $J = \langle y \rangle$ και ότι το J είναι πρώτο, μη μέγιστο ιδεώδες.

   Απάντηση: Αν $g(x, y) \in \langle y \rangle$, τότε $g(x, y) = y\,h(x, y) \Rightarrow g(x, 0) = 0\,h(x, 0) = 0$, συνεπώς $g(x, y) \in J$. Επομένως $\langle y \rangle \subset J$. Αντίστροφα, έστω ότι $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j}x^iy^j \in J$, δηλ. $f(x, 0) = 0$. Όμως $f(x, y) = \sum_i a_{i,0}x^i + y(\sum_{i,j>0} a_{i,j}x^iy^{j-1})$. Επομένως $0 = f(x, 0) = \sum_i a_{i,0}x^i \Rightarrow f(x, y) = y(\sum_{i,j>0} a_{i,j}x^iy^{j-1}) = yh(x, y)$ και $J \subset \langle y \rangle$. Εναλλακτικά για τον δεύτερο εγκλεισμό: από το Θεώρημα Διαίρεσης στον $(\mathbb{Z}_5[x])[y]$, έχουμε ότι $f(x, y) = yp(x, y) + r(x, y)$, όπου $\deg_y r(x, y) = 0$ ή $r(x, y) = 0$, δηλ. $r(x, y) \in \mathbb{Z}_5[x]$ και άρα $r(x, y) = r(x, 0)$. Αν $f(x, y) \in J$, τότε $0 = f(x, 0) = 0\,p(x, 0) + r(x, 0)$ και άρα $r(x, 0) = r(x, y) = 0$, συνεπώς $f(x, y) = yp(x, y)$.

   Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_5[x, y]$ είναι Π.Μ.Α. και το y είναι ανάγωγο και πρώτο. Άρα το $\langle y \rangle$ είναι πρώτο ιδεώδες. Το $\langle y \rangle \subsetneqq \langle x, y \rangle$, άρα το $\langle y \rangle$ δεν είναι μέγιστο ιδεώδες.

   (β') (10 μον) Να βρείτε όλα τα μέγιστα ιδεώδη του R που περιέχουν το J.

   Απάντηση: Το I είναι μέγιστο ιδεώδες του R που περιέχει το J αν και μόνο αν το I/J είναι μέγιστο ιδεώδες του R/J. Έστω $\phi : R \to \mathbb{Z}_5[x]$, ο επιμορφισμός $f(x, y) \mapsto f(x, 0)$. Όπως αποδείξαμε προηγουμένως $\ker\phi = J = \langle y \rangle$, και άρα $\psi : R/J \cong \mathbb{Z}_5[x]$, όπου $f(x, y) + J \mapsto f(x, 0)$. Για ένα στοιχείο $h = \sum_i b_ix^i \in \mathbb{Z}_5[x]$, γράφουμε $\tilde{h}$ για την προεικόνα του $\sum_i b_ix^i \in \mathbb{Z}_5[x, y]$. Αφού $\mathbb{Z}_5[x]$ είναι Π.Κ.Ι., τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_5[x]$ είναι της μορφής $\langle g \rangle$, όπου το g είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_5[x]$. Έστω λοιπόν ότι $\psi(I/J) = \langle g \rangle$ και ότι $g = \sum_i a_ix^i \in \mathbb{Z}_5[x]$. Θα δείξουμε ότι $I = \langle y, \tilde{g} \rangle$. Πράγματι, αν $f(x, y) \in I$, τότε $f(x, y) + J = g\,h \Rightarrow f(x, y) - \tilde{g}\,\tilde{h} \in J$ και άρα $f(x, y) - \tilde{g}\,\tilde{h} = y\,q(x, y)$. Επομένως $f(x, y) = \tilde{g}\,\tilde{h} + y\,q(x, y)$. Συμπεραίνουμε ότι τα μέγιστα ιδεώδη του R που περιέχουν το J είναι της μορφής $I = \langle y, \tilde{f} \rangle$, όπου f είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_5[x]$. Για παράδειγμα, τα παρακάτω είναι μέγιστα ιδεώδη του R που περιέχουν το J: $\langle x, y \rangle$, $\langle x + 1, y \rangle$, $\langle x + xy + y^2, y \rangle$, $\langle x + 1, y \rangle$, $\langle x^2 + x + 1, y \rangle$. ΠΡΟΣΟΧΗ: το ιδεώδες $\langle x, 2, y \rangle$ δεν είναι μέγιστο στον R, αφού $\langle x, 2, y \rangle = R$.

3. (25) Έστω $R = \{a + b\sqrt{-7} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(α΄) (10 Μον.) Να δειχθεί ότι ο R είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{C}$ και ότι τα 1 και -1 είναι τα μόνα αντιστρέψιμα στοιχεία του R.

Απάντηση: Έστω $a_1 + b_1\sqrt{-7}$, $a_2 + b_2\sqrt{-7} \in R$. Τότε

$$(a_1 + b_1\sqrt{-7}) - (a_2 + b_2\sqrt{-7}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{-7} \in R,$$

ενώ

$$(a_1 + b_1\sqrt{-7}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{-7}) = (a_1a_2 + 7b_1b_2) + (a_1b2 + a_2b_1)\sqrt{-7} \in R.$$

Επίσης, $1 = 1 + 0\sqrt{-7} \in R$, επομένως ο R είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{C}$.

Η συνάρτηση της νόρμας $N : R \to \mathbb{N}$, $a + b\sqrt{-7} \mapsto a^2 + 7b^2$ είναι πολλαπλασιαστική. Αν $a + b\sqrt{-7}$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R, τότε υπάρχει $c + d\sqrt{-7}$, τέτοιο ώστε $(a + b\sqrt{-7})(c+d\sqrt{-7}) = 1 \Rightarrow N(a+b\sqrt{-7})N(c+d\sqrt{-7}) = 1$. Αφού $N(a+b\sqrt{-7}), N(c+d\sqrt{-7})$ είναι ακέραιοι, συμπεραίνουμε ότι $N(a + b\sqrt{-7}) = 1$. Κατά συνέπεια $b = 0$ και $a = \pm 1$.

(β΄) (5 Μον.) Να εξετάσετε αν το 7 είναι ανάγωγο στοιχείο του R.

Απάντηση: Αφού $7 = (-\sqrt{-7})(\sqrt{-7})$ και τα στοιχεία $\pm\sqrt{-7}$ του R δεν είναι αντιστρέψιμα, συμπεραίνουμε ότι το 7 δεν είναι ανάγωγο στον R.

(γ΄) (5 Μον.) Να δειχθεί ότι το ιδεώδες του R που παράγεται από τα 2 και $2 + \sqrt{-7}$ ισούται με τον R.

Απάντηση: Έστω $I = \langle 2, 2 + \sqrt{-7}\rangle$. Παρατηρούμε ότι $\sqrt{-7} = (2 + \sqrt{-7}) - 2 \in I \Rightarrow -7 \in I \Rightarrow 1 = 2 \cdot 4 - 7 \in I \Rightarrow I = R$.

(δ΄) (5 Μον.) Να βρεθεί το σώμα κλασμάτων του R.

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-7}] = \{a + b\sqrt{-7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υποσώμα του $\mathbb{C}$ (ισόμορφο με το $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 + 7\rangle$) και ότι $R \subset K$. Έστω τώρα $R \subset F \subset K$, όπου F σώμα. Θα δείξουμε ότι $F = K$. Πράγματι, έστω $r = \frac{m}{n} + \frac{s}{t}\sqrt{-7} \in K$. Τότε $rnt = tm + sn\sqrt{-7} \in R$ και επομένως, $rnt \in F$. Αφού F είναι σώμα και $n, t \in F$, συμπεραίνουμε ότι $r = (rnt)n^{-1}t^{-1} \in F$. Επομένως $F = K$.

4. (20) Έστω $f(x) = x^4 + 6x^2 + 2$.

(α΄) Να βρείτε τους ανάγωγους παράγοντες του $f(x)$ στον $\mathbb{Q}[x]$, στον $\mathbb{R}[x]$ και στον $\mathbb{C}[x]$.

Απάντηση: Το $f(x)$ είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$ σύμφωνα με το κριτήριο του Eisenstein για $p = 2$.

Θέτοντας $z = x^2$, βρίσκουμε ότι

$$f(x) = (x^2 + 3 + \sqrt{7})(x^2 + 3 - \sqrt{7}) \in \mathbb{R}[x].$$

Οι παράγοντες $x^2 + 3 + \sqrt{7}$, $x^2 + 3 - \sqrt{7}$ είναι ανάγωγα πολυώνυμα στον $\mathbb{R}[x]$, αφού δεν έχουν ρίζες στον $\mathbb{R}$. Τέλος,

$$f(x) = (x - \sqrt{-3 + \sqrt{7}})(x + \sqrt{-3 + \sqrt{7}})(x - \sqrt{-3 - \sqrt{7}})(x + \sqrt{-3 - \sqrt{7}}) \in \mathbb{C}[x]$$

είναι η ανάλυση του $f(x)$ σε ανάγωγους παράγοντες στον $\mathbb{C}[x]$.

(β΄) Αν $g(x) = x^7 + x^2 + 1$, να βρείτε τον μκδ των $f(x)$ και $g(x)$ στον $\mathbb{Q}[x]$. Στη συνέχεια να βρείτε $h(x)$, τέτοιο ώστε $\langle f(x), g(x)\rangle = \langle h(x)\rangle$.

Απάντηση: Αφού το $f(x)$ δεν είναι παράγοντας του $g(x)$ ($g(x) = f(x)(x^3 - 6x) + (34x^3 + x^2 + 12x + 1)$) και το $f(x)$ είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$, συμπεραίνουμε ότι το 1 είναι μκδ των $f(x)$ και $g(x)$ στον $\mathbb{Q}[x]$. Επομένως $\langle f(x), g(x)\rangle = \langle 1\rangle$.

5. (15) Έστω $R = M_2(\mathbf{Z}_3)$.

(α΄) (05 Μον.) Να βρείτε έναν διαιρέτη του μηδενός του R.

Απάντηση: Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι διαιρέτης του μηδενός, αφού $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$.

(β΄) (10 Μον.) Να βρείτε όλα τα ιδεώδη του R που περιέχουν τον πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Απάντηση: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και J ένα ιδεώδες του R με $A \in J$. Τότε

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in J, \quad A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in J \text{ και } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in J.$$

Άρα $J = R$.

6. (10) Έστω r ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του άπειρου δακτυλίου R και έστω ότι $15r = 0$ ενώ $mr \neq 0$, για $0 < m < 15$.

(α΄) (5 Μον.) Να αποδείξετε ότι η χαρακτηριστική του R είναι 15.

Απάντηση: Αφού $mr \neq 0$,για $0 < m < 15$ συμπεραίνουμε ότι η χαρακτηριστική του R είναι ≥ 15. Επίσης $15\,1_R = 15(r\,r^{-1}) = (15r)(r^{-1}) = 0_R$, συνεπώς η χαρακτηριστική του R είναι 15.

(β΄) (5 Μον.) Να δώσετε δύο παραδείγματα άπειρων δακτυλίων με χαρακτηριστική 15.

Απάντηση: $\mathbb{Z}_{15}[x]$, $\mathbb{Z}_{15}[x] \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{15}[x, y]$, κ.λ.π. ΠΡΟΣΟΧΗ: $\mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ δεν είναι άπειρος δακτύλιος!