Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων

Εισαγωγικές Εξετάσεις ΠΜΣ

Θεωρητικά Μαθηματικά, 1 Σεπτεμβρίου 2017

1 Άλγεβρα

1. Έστω $(G, *)$ ομάδα με $|G| = 9$. Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς (αποδείξτε/εξηγήστε τις απαντήσεις):

   (α) Η G είναι αβελιανή.

   (β) Η G είναι κυκλική.

   (γ) Υπάρχει $x \in G$, $x \neq e$, τέτοιο ώστε $x = x^3$.

2. Εξετάστε αν η ομάδα $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_5$ είναι κυκλική.

3. Δείξτε ότι το μόνο γνήσιο ιδεώδες του δακτυλίου $M_2(\mathbf{R})$ είναι το μηδενικό.

4. (α΄) Βρείτε πρώτο ιδεώδες του $\mathbf{Z}[x]$ που δεν είναι μέγιστο.

   (β΄) Βρείτε ιδεώδες του $\mathbf{Z}[x]$ που δεν είναι πρώτο και περιέχει το στοιχείο 11.

   (γ΄) Δείξτε ότι το $\langle x - 7, 3\rangle$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbf{Z}[x]$.

2 Ανάλυση

1. (α΄) Δείξτε ότι για κάθε $x \in (1, \infty)$ η σειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, \infty)$ και $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n}{n^x}$

   (β΄) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin^2 x, x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένης κύμανης, υπολογίστε την ολική κύμανση $V_0^{\frac{3\pi}{2}} f$ και τη συνάρτηση ολικής κύμανσης V_f.

2. (α΄) Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subset X$. Δείξτε ότι αν A είναι κλειστό υποσύνολο τότε A είναι πλήρης υπόχωρος. Ισχύει το αντίστροφο;

   (β΄) Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subset X$. Δείξτε ότι αν A είναι κλειστό υποσύνολο τότε A είναι συμπαγής υπόχωρος. Ισχύει το αντίστροφο;

3. (α΄) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ολόμορφη στο $\mathbf{C}$. Αν $Re(f(z)) \geq 0, \forall z \in \mathbf{C}$, δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

   (β΄) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ολόμορφη στο $\mathbf{C}$. Αν $|f(z)| \leq |z|^2$, δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2.

3 Γεωμετρία

1. *Παραμέτρηση Monge* είναι μία παραμέτρηση επιφάνειας που δίνεται ως γράφημα συνάρτησης, και την λέμε *επίπεδη* εάν οι πρώτες παράγωγοι της συνάρτησης είναι μηδενικές σε ένα κεντρικό σημείο. Δείξτε ότι εάν σε σημείο $\mathbf{r}_0 \in \Sigma$, όπου $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ ως προς δοθείσα παραμέτρηση $\mathbf{r}(u, v)$, το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}(u_0, v_0)$ έχει μη-μηδενική συντεταγμένη στην κάθετη κατεύθυνση, δηλαδή $\mathbf{N}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{k} \neq 0$, τότε η απεικόνιση $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ για

(u, v) σε κάποια γειτονιά του (u_0, v_0) δίνει αλλαγή συντεταγμένων και επομένως η επιφάνεια Σ έχει παραμέτρηση Monge με κεντρικό σημείο $\mathbf{r}_0$, με παραμέτρους (x, y).

Εξηγήστε γιατί μπορούμε να ισχυριστούμε, γενικεύοντας τα παραπάνω, ότι *κάθε* επιφάνεια, θεωρούμενη ως εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα του $\mathbf{R}^3$, έχει παραμέτρησεις Monge που την καλύπτουν, με παραμέτρους (x, y), (y, z) ή (x, z).

Τέλος, υπολογίστε την πρώτη και δεύτερη θεμελιώδη μορφή για γενική επίπεδη παραμέτρηση Monge $(x, y) \mapsto \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ και δώστε την γεωμετρική ερμηνεία της ΔΘΜ.

2. Δώστε τις συνθήκες κανονικότητας παραμέτρησης επιφάνειας $\mathcal{D} \to \mathbf{R}^3 : (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$ με πεδίο ορισμού ανοικτό, συνεκτικό υποσύνολο $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$ και εξηγήστε την γεωμετρική τους σημασία. Πόσες τέτοιες παραμετρήσεις χρειαζόμαστε, κατ' ελάχιστον, για να καλύψουμε τις επιφάνειες/πολλαπλότητες: μίαν σφαίρα; έναν τόρο; *(δώστε κατάλληλα σχήματα.)*

   Για ποιές επιφάνειες και πώς ορίζεται η απεικόνιση Gauss; Περιγράψτε την παράγωγό της και ορίστε τις πρωτεύουσες καμπυλότητες κ_1, κ_2 σε κάθε σημείο. Κάνετε σχήμα ενός τόρου και δώστε τα σύνολα των σημείων του που είναι ελλειπτικά, υπερβολικά και παραβολικά. Τέλος, δώστε την εικόνα της απεικόνισης Gauss για τον τόρο. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η σφαίρα καλύπτεται διπλά;

3. Θεωρούμε την κωνική επιφάνεια $\{x^2 + y^2 = z^2, z > 0\} \subset \mathbf{R}^3$, καθώς και τον ορθό κύλινδρο $\{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^3$. Και στις δύο περιπτώσεις, η τομή με το οριζόντιο επίπεδο $z = 1$ δίνει κύκλο. Ο κύκλος αυτός δίνει γεωδαισιακή καμπύλη (με κατάλληλη παραμέτρηση) για την κάθε επιφάνεια ή όχι; Εξηγήστε γεωμετρικά.

   Περιγράψτε όλες τις γεωδαισιακές καμπύλες στον κύλινδρο. Τα σημεία $(1, 0, 0)$ και $(-1, 0, 2)$ ενώνονται με μοναδική γεωδαισιακή ή όχι;

   Για την κωνική επιφάνεια, εξηγήστε, χωρίς αναλυτική απόδειξη, ότι είναι τοπικά ισομετρική με το σύνολο του επιπέδου $\{r > 0,\ \theta \in [0, \theta_0]\}$. Βρείτε την τιμή της γωνίας θ_0. Περιγράψτε επομένως πώς βρίσκουμε τις γεωδαισιακές καμπύλες του κώνου.