Στατιστική

Εκτιμητική

Χατζόπουλος Σταύρος

28/2/2018 και 01 /03/2018

Εισαγωγή

- Το αντικείμενο της Στατιστικής είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν τον πληθυσμό ή το φαινόμενο που μελετάμε, με τη βοήθεια ενός τυχαίου δείγματος.

- Συνήθως μας ενδιαφέρει η κατανομή *F* του πληθυσμού και κυρίως οι άγνωστες παράμετροι της κατανομής αφού με τη βοήθεια της περιγραφικής στατιστικής μπορεί να έχουμε καταλήξει τί είδους είναι η κατανομή μας και να θέλουμε μια σαφέστερη εικόνα της.

Εισαγωγή

- **Ορισμός 1.13. Τυχαίο δείγμα** (τ.δ.) (random sample) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ανεξάρτητων πραγματοποιήσεων $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ της ίδιας τ.μ. Ο αριθμός n ονομάζεται μέγεθος του δείγματος. Τα αποτελέσματα n δοκιμών σημειώνονται με $\underset{\sim}{\mathrm{x}}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και δεν είναι τυχαίες μεταβλητές, ενώ το τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι τ.μ.

- Το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό ο οποίος μπορεί να είναι άπειρου πλήθους, πεπερασμένου ή το πολύ αριθμήσιμου πλήθους.

3

Εισαγωγή

- Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο μια άγνωστη παράμετρος θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $f(x;\theta)$.

- Αν οι άγνωστες παράμετροι είναι περισσότερες από μια, τότε $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_{1,} \theta_{2,} \dots, \theta_{n,})'$ θα είναι το διάνυσμα των παραμέτρων και η σ.π.π. θα συμβολίζεται με $f(x;\underset{\sim}{\theta})$.

- Στην πράξη συνήθως η συναρτησιακή μορφή της $f_X(x)$ είναι γνωστή, σε αντίθεση με τις παραμέτρους που είναι άγνωστες και πρέπει να εκτιμηθούν.

- Το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελεί το αντικείμενο της **Παραμετρικής Στατιστικής**.

4

Εισαγωγή

- Με τη βοήθεια ενός τ.δ. γίνεται προσπάθεια να προσδιοριστούν οι άγνωστες παράμετροι της κατανομής που μελετάται. Στο εξής, η $f_X(x)$ θα συμβολίζεται με $f(x;\theta)$, για να δηλωθεί ότι η κατανομή εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο θ.

- Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο μια άγνωστη παράμετρος θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $f(x;\theta)$.

- Αν οι άγνωστες παράμετροι είναι περισσότερες από μια, τότε $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_{1,}\theta_{2,} \dots, \theta_{n,})'$ θα είναι το διάνυσμα των παραμέτρων και η σ.π.π. θα συμβολίζεται με $f(x;\underset{\sim}{\theta})$.

5

Εισαγωγή

Στην **κατανομή Poisson** $P(\lambda)$, η οποία έχει σ.π.:

$$P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\ , x = 0, 1, \dots, \lambda > 0\ ,$$

η παράμετρος είναι το λ και ο παραμετρικός χώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$.

Στη **διωνυμική κατανομή** $B(n,p)$, η οποία έχει σ.π.:

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\ , x = 0, 1, \dots, n\ , 0 < p < 1\ ,$$

το μέγεθος του δείγματος n είναι γνωστό, η παράμετρος είναι η πιθανότητα p και $\Omega = (0,1)$.

6

Εισαγωγή

Στην **εκθετική κατανομή** $E(\lambda)$, η οποία έχει σ.π.π.:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, , x > 0\, , \lambda > 0$$

η παράμετρος είναι το λ και $\Omega = (0, +\infty)$.

Στην **κανονική κατανομή** $N(\mu, \sigma^2)$, η οποία έχει σ.π.π.:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, , x \in \mathbb{R}\, ,$$

υπάρχουν δύο παράμετροι, οι οποίες είναι οι μ και σ^2.

- $\mu = \theta$ *:* άγνωστο *και* σ^2 γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = \mathbb{R}$
- $\sigma^2 = \theta$: άγνωστο και μ: γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$
- $\mu = \theta_1$: άγνωστο και $\sigma^2 = \theta_2$: άγνωστο. $\underset{\sim}{\theta}' = (\theta_1, \theta_2)$ και $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

7

Εισαγωγή

Στην κατανομή **γάμμα** $G(\alpha, \beta)$, η οποία έχει σ.π.π.:

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, , x > 0\, ,$$

οι παράμετροι είναι οι $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

- $\alpha = \theta$ *:* άγνωστο *και* β : γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$.
- $\beta = \theta$: άγνωστο και α: γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$
- $\alpha = \theta_1$: άγνωστο και $\beta = \theta_2$: άγνωστο. $\underset{\sim}{\theta}' = (\theta_1, \theta_2)$ και $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

8

Εισαγωγή

Στην κατανομή **βήτα** $B(\gamma,\delta)$, η οποία έχει σ.π.π.:

$$f_X(x) = \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1}}{\beta(\gamma,\delta)}\ , 0 < x < 1\ ,$$

οι παράμετροι είναι οι $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

- $\alpha = \theta$ *:* άγνωστο *και* β : γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$
- $\beta = \theta$: άγνωστο και α: γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$
- $\alpha = \theta_1$: άγνωστο και $\beta = \theta_2$: άγνωστο. $\underset{\sim}{\theta}' = (\theta_1\,, \theta_2)$ και $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

9

Εισαγωγή

Ορισμός. Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από τ.μ. X. Κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$, που δεν περιέχει άγνωστες παραμέτρους, καλείται **στατιστική συνάρτηση** (στ.σ.). Το πεδίο ορισμού της στ.σ. είναι ο δειγματοχώρος, ενώ το πεδίο τιμών είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός. Εκτιμήτρια συνάρτηση ή **εκτιμητής** της παραμέτρου θ καλείται μια στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ που έχει πεδίο τιμών τον παραμετρικό χώρο Ω και συμβολίζεται με $\hat{\theta}$. Η εκτιμήτρια συνάρτηση είναι τυχαία μεταβλητή. Η τιμή $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ της εκτιμήτριας συνάρτησης για ένα συγκεκριμένο τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{x}}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ καλείται εκτίμηση της παραμέτρου θ.

Με την εκτίμηση παραμέτρων του πληθυσμού ασχολείται η Εκτιμητική και προτείνει δύο ειδών εκτιμητές: **εκτιμητές σε σημείο** και **εκτιμητές σε διάστημα**.

10

Εισαγωγή

- Προφανώς, οι στατιστικές συναρτήσεις περιέχουν τ.μ., με συνέπεια να είναι και οι ίδιες τ.μ. Αν οι τ.μ. X_i , αντικατασταθούν με τις τιμές $x_{i,}$, τότε η τιμή της στατιστικής συνάρτησης είναι μια συγκεκριμένη πραγματική τιμή. Ο πραγματικός αυτός αριθμός ονομάζεται τιμή της στατιστικής συνάρτησης. Οι στ.σ. βοηθούν να οριστούν τα στατιστικά του δείγματος από τις παραμέτρους του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται. Τα στατιστικά αυτά είναι:

- Ο δειγματικός μέσος που ορίζεται ως:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

11

Εισαγωγή

- Η δειγματική ροπή *r* τάξης που ορίζεται ως:

$$m'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r , \qquad r = 2,3,\ldots$$

- Η δειγματική κεντρική ροπή *r* τάξης που ορίζεται ως:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^r , \qquad r = 2,3,\ldots$$

- Για $r = 2$ στον παραπάνω τύπο προκύπτει η δειγματική διασπορά που συμβολίζεται με:

$$S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \ .$$

12

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας

- Η μέθοδος **μεγίστης πιθανοφάνειας** προτάθηκε πρώτη φορά από τον Gauss, πιστώνεται όμως στο Fisher γιατί αυτός πρώτος στο 1922 ερεύνησε τις ιδιότητες της μεθόδου.

- Ας είναι $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή $f(x;\theta)$

- **Ορισμός. Πιθανοφάνεια** ονόμασε το 1912 ο R.A. Fisher την από κοινού κατανομή του δείγματος $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$, όταν η κατανομή θεωρείται συνάρτηση της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$ για δοσμένη τιμή του δείγματος και συμβολίζεται με:

$$L\left(\underset{\sim}{\theta}\middle|\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\ \underset{\sim}{\theta}\right) = L(\underset{\sim}{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i; \underset{\sim}{\theta}\right).$$

13

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας

- **Ορισμός.** Έστω $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \underset{\sim}{\theta})$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας του τυχαίου δείγματος $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ο εκτιμητής $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ λέγεται **εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας** (Ε.Μ.Π.) της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$ αν:

$$L(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \underset{\sim}{\hat{\theta}}) = \max_{\underset{\sim}{\hat{\theta}} \in \boldsymbol{\Omega}} L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\ \underset{\sim}{\theta})$$

ή ισοδύναμα, αν ο εκτιμητής $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $\ln L(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \underset{\sim}{\theta})$.

14

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Παρατηρήσεις.

1. Στην περίπτωση που η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\theta)$ είναι διαφορίσιμη, ο Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ είναι η λύση της εξίσωσης πιθανοφάνειας:
$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0\,,$$
που ικανοποιεί τη σχέση:
$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0\,.$$
2. Για την εύρεση του μεγίστου της πιθανοφάνειας $L(\underset{\sim}{\theta})$ υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:
   - να μην υπάρχει πεπερασμένο μέγιστο,
   - να υπάρχει ακριβώς ένα μέγιστο,
   - να υπάρχουν περισσότερα από ένα μέγιστα.

15

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Παράδειγμα 1. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli $B(1,\theta)$. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. της άγνωστης παραμέτρου θ.

Παράδειγμα 2. Έστω τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ από εκθετική κατανομή με σ.π.π.

$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad 0 < x < +\infty,\ \theta \in \Omega = \{\theta \mid 0 < \theta < +\infty\}.$

Να υπολογισθεί ένας Ε.Μ.Π. για την παράμετρο θ. Επιπλέον, να βρεθεί η τιμή του εκτιμητή, αν από ένα δείγμα μεγέθους 5 δίνονται οι παρατηρήσεις: 8, 11, 15 , 18 και 23.

Παράδειγμα 3. Έστω τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με κανονική κατανομή του οποίου η μέση τιμή είναι θ και η διασπορά 1. Με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας να υπολογισθεί ένας εκτιμητής της άγνωστης παραμέτρου θ.

16

Μέθοδος Ροπών

Η **μέθοδος των ροπών** είναι μέθοδος εκτίμησης σε σημείο. Προτάθηκε από τον Karl Pearson (1891), εφαρμόζεται σε κατανομές που υπάρχουν ροπές k-τάξης και περιγράφεται ως εξής:

Έστω τ.δ. $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ που ακολουθεί την κατανομή με σ.π.π. $f(x;\theta)$ και με θεωρητικές ροπές:

$$\mu_1 = EX, \mu_2 = EX^2, \dots, \mu_k = EX^k.$$

Οι θεωρητικές ροπές είναι συναρτήσεις των άγνωστων παραμέτρων.

Υπενθυμίζεται ότι οι δειγματικές ροπές δίνονται από τις σχέσεις:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,, m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \,, \dots, m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \ .$$

17

Μέθοδος Ροπών

- **Θεώρημα 1.** Οι δειγματικές ροπές είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των θεωρητικών ροπών.

- Η μεθοδολογία του υπολογισμού των εκτιμητών, με τη μέθοδο των ροπών, είναι η εξής: εξισώνονται οι θεωρητικές ροπές με τις δειγματικές ροπές ίσης τάξης. Με τον τρόπο αυτό συνδέονται οι εκτιμώμενες παράμετροι με στατιστικές συναρτήσεις και από τη λύση των εξισώσεων που προκύπτουν, υπολογίζονται οι εκτιμητές.

- **Παράδειγμα 4.** Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από κατανομή $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, $0 < \theta < +\infty$. Να υπολογισθεί ένας εκτιμητής για την παράμετρο θ με τη μέθοδο των ροπών.

18

Μέθοδος Ροπών

- **Παράδειγμα 5.** Έστω η τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Να εκτιμηθούν οι άγνωστες παράμετροι μ και σ^2 της κατανομής με τη μέθοδο ροπών.

- **Παράδειγμα 6**. Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$, όπου $x = 1,2, \ldots$, $0 \leq \theta \leq 1$. Να βρεθεί ένας εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας για την άγνωστη παράμετρο θ.

19

Αμερόληπτοι Εκτιμητές

- Αν $E(T(\underset{\sim}{X})) = \theta$, τότε η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ονομάζεται **αμερόληπτος εκτιμητής** (unbiased estimator) της παραμέτρου θ. Αν $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, τότε η διαφορά $E(\hat{\theta}) - \theta$ ονομάζεται **μεροληψία** (bias) του εκτιμητή. Στην περίπτωση που η παράμετρος $\underset{\sim}{\theta}$ είναι πολυδιάστατη, τότε ο εκτιμητής της θα είναι επίσης πολυδιάστατος της μορφής $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{X})$ και, για να είναι αμερόληπτος, θα πρέπει να ισχύει $E\left(\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{X})\right) = \underset{\sim}{\theta}$. Αν αναζητείται ο εκτιμητής μιας συνάρτησης της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$, έστω της $g(\underset{\sim}{\theta})$, τότε ένας εκτιμητής $T(\underset{\sim}{X})$ καλείται αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\underset{\sim}{\theta})$, αν ισχύει:

$$E\left(T(\underset{\sim}{X})\right) = g\left(\underset{\sim}{\theta}\right), \underset{\sim}{\theta} \in \Omega .$$

20

Αμερόληπτοι Εκτιμητές

- Η συνάρτηση $g(\underset{\sim}{\theta})$ ονομάζεται εκτιμήσιμη ή U-εκτιμήσιμη συνάρτηση κατά Lehmann Αν όμως ισχύει ότι:

$$E\left(T(\underset{\sim}{X})\right) \neq g\left(\underset{\sim}{\theta}\right),$$

τότε η μεροληψία ή το μέσο σφάλμα της $T(\underset{\sim}{X})$ ισούται με:

$$b\left(T(\underset{\sim}{X})\right) = E\left(T(\underset{\sim}{X})\right) - g\left(\underset{\sim}{\theta}\right).$$

- Η μεροληψία είναι συνάρτηση του $\underset{\sim}{\theta}$, αλλά συμβολίζεται με $b\left(T(\underset{\sim}{X})\right)$, διότι αναφέρεται στη στ.σ. $T(\underset{\sim}{X})$.

21

Αμερόληπτοι Εκτιμητές

Παράδειγμα 7. Να δειχθεί ότι η δειγματική διασπορά που δίνεται από τον τύπο:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της θεωρητικής διασποράς οποιασδήποτε κατανομής, ενώ η δειγματική διασπορά που δίνεται από τον τύπο:

$$S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής της αντίστοιχης θεωρητικής.

22

Αμερόληπτοι Εκτιμητές

Παράδειγμα 8. Μετράται η απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε πέντε περιπτώσεις. Τα αποτελέσματα ήταν:

1486	**1489**	**1498**	**1505**	**1507**

Αν θεωρηθεί ότι η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, να βρεθεί ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διασποράς σ^2, όταν:

- Η μέση τιμή μ είναι άγνωστη.
- Ισχύει ότι $\mu = 1500$.

23

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Έστω $\underset{\sim}{X}'$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, όπου η διασπορά είναι γνωστός αριθμός. Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου $\theta = \mu$ είναι η δειγματική μέση τιμή.

Άσκηση 2. Έστω $\underset{\sim}{X}'$ τυχαίο δείγμα από κατανομή Poisson με μέση τιμή λ. Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ είναι η δειγματική μέση τιμή.

Άσκηση 3. Έστω X ο αριθμός των στιγμάτων ανά 100 μέτρα ενός ελάσματος. Είναι γνωστό ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Αν 40 παρατηρήσεις της X, έδωσαν 5 φορές μηδέν στίγματα, 7 φορές ένα στίγμα, 12 φορές δύο στίγματα, 9 φορές τρία στίγματα, 5 φορές τέσσερα στίγματα και από 1 φορά πέντε και έξι στίγματα, να βρεθεί ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ.

24

Ασκήσεις

Άσκηση 4. Έστω $\underset{\sim}{X}'$ τυχαίο δείγμα μεγέθους n από κατανομές με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-x\theta} \ , \qquad 0 < x < +\infty \ , \qquad 0 < \theta < +\infty \ .$$

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta^3} x^2 e^{-x\theta} \ , \qquad 0 < x < +\infty \ , \qquad 0 < \theta < +\infty \ .$$

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|} \ , \qquad -\infty < x < +\infty \ , \qquad -\infty < \theta < +\infty \ .$$

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις, να βρεθεί ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας και ο εκτιμητής με τη μέθοδο των ροπών για την άγνωστη παράμετρο θ.

25

Ασκήσεις

Άσκηση 5. Έστω $\underset{\sim}{X}'$ τ.δ. μεγέθους n, το οποίο ακολουθεί μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} \ , \qquad 0 < x < 1 \ , \qquad 0 < \theta < +\infty \ .$$

Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ είναι ο:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln x_i \ .$$

Επίσης, να αποδειχθεί ότι ο συγκεκριμένος εκτιμητής είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου θ.

26

Ασκήσεις

Άσκηση 6. Έστω $\underset{\sim}{X}'$ τ.δ. μεγέθους n από κατανομές με συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} , \qquad x \geq 0 , \qquad 0 < \theta < +\infty .$$

Να δειχθεί ότι η δειγματική μέση τιμή είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής για την παράμετρο θ.

Να δειχθεί ότι η διασπορά της δειγματικής μέσης τιμής ισούται με θ^2/n.

Ένας ερευνητής από ένα τ.δ. μεγέθους 5 έλαβε τις παρατηρήσεις 3.5, 8.1, 0.9, 4.4 και 0.5. Στην περίπτωση αυτή να βρεθεί ένας εκτιμητής για την παράμετρο θ.

27

Ασκήσεις

Άσκηση 7. Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$, όπου $x = 1,2, \ldots, 0 \leq \theta \leq 1$.

Να βρεθεί ένας εκτιμητής για την παράμετρο θ με τη μέθοδο των ροπών.

Χρησιμοποιείστε τα παρακάτω δεδομένα για να υπολογίσετε έναν εκτιμητή σε σημείο του θ

3, 34, 7, 4, 19, 2, 1, 19,
43, 2, 22, 4, 19, 11, 7, 1,
2, 21, 15, 16.

28